修正型正弦曲線図法の総論

想像地図研究所　2018 年

概要

修正型正弦曲線図法は、想像地図の描画のために筆者が独自に開発した地図投影法の 1 つである。大雑把に言えば、正弦曲線図法(サンソン図法)に、「惑星が真球ではなく赤道半径(長半径)と極半径(短半径)の異なる回転楕円体であることを考慮した補正」を加えたものである。そのため、世界地図のみならず大縮尺の都市地図の描画にも適用することができる。

正弦曲線図法と同じく、面積を正しく表示する正積図法である。距離については、東西方向の距離の比はどの場所でも正しく表示する。南北方向の距離の比は中央経線（曲線ではなく直線で表される経線）付近で正しく表示する。そのため、「中緯度以下にあって南北に長い国」や「赤道付近にあって東西に長い国」の地図を描くのに適している。

正弦曲線図法は惑星を真球として扱っているので、緯線の南北間隔は全て等しいものとみなされる(政春, 2011)。しかし、修正型正弦曲線図法は惑星を回転楕円体として扱うため緯線の南北間隔は一定ではない。そのため緯線の数値的な扱いが複雑である。そのため、通常の意味で用いられる「緯度」(地理緯度、楕円体面の法線と赤道面とがなす角度)ではなく、子午線の弧長に基づく「修正緯度」(あるいは求長緯度)と呼ばれる緯度を表示する。修正緯度は修正型正弦曲線図法において等間隔となる。

修正緯度とは

修正緯度(求長緯度)は、赤道から地理緯度までの子午線弧長で換算される緯度である。角度の単位にラジアンを用いれば、修正緯度 μ は、地理緯度 φ と以下のような関係にある。

$$\mu = \frac{\pi}{2} \times \frac{S(\varphi)}{S\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

ここで、S(φ) は、赤道から地理緯度 φ までの子午線弧長である。

φ [ラジアン] = k° として、角度の単位に「度」を用いて書けば、

$$\mu = 90° \times \frac{\text{赤道から北緯 k°までの子午線弧長}}{\text{赤道から北極までの子午線弧長}}$$

とも表せる。

更成緯度とは

半径が惑星の楕円体の長半径に等しい球を考えたとき、楕円体上の位置を当該球に惑星の自転軸と平行に射影した位置が示す緯度として定義される。更成緯度 β は、地理緯度 φ と以下のような関係にある。

$$\beta = \arctan\left(\sqrt{1-e^2}\ \tan\varphi\right)$$

なお e は惑星の第一離心率である。

修正型正弦曲線図法の投影式

投影式は、地理緯度 φ , 更成緯度 β , 経度 λ を用いて、以下のように表される。
なお S(φ) は、赤道から地理緯度 φ までの子午線弧長である。

$$x = a\lambda \cos\beta$$
$$y = S(\varphi)$$

地理緯度 φ を用いて以下のようにも書ける。

$$x = \frac{a\lambda}{\sqrt{1+(1+e^2)\tan^2\varphi}\,\sqrt{1+e^2}\tan\varphi}$$
$$y = \int_0^{\varphi} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\theta)} d\theta$$

この式には楕円積分が含まれているため初等関数で表せない。そこで、有効数字を考慮して冪級数展開したものが以下である(河瀬, 2009)。なお、 e はネイピア数ではなく、第一離心率であることに注意。

$$\mathrm{S} = \mathrm{a}(1-\mathrm{e}^2)\left(C_0\varphi - C_2\frac{\sin 2\varphi}{2} + C_4\frac{\sin 4\varphi}{4} - C_6\frac{\sin 6\varphi}{6} + C_8\frac{\sin 8\varphi}{8} - C_{10}\frac{\sin 10\varphi}{10}\right)$$

$$C_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10}$$

$$C_2 = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10}$$

$$C_4 = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10}$$

$$C_6 = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10}$$

$$C_8 = \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10}$$

$$C_{10} = \frac{693}{131072}e^{10}$$

$$\mathrm{e} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

想像地図の図葉では、修正緯度を「緯度」として表示している。従って、修正緯度が既知で地理緯度が未知となる。そこで以下では、修正緯度 μ または赤道からの子午線弧長 S が既知で地理緯度が未知の場合において、地理緯度を算出する方法を示す。なお、修正緯度 μ から子午線弧長 S を算出する式については前ページを参照。

初等関数で表すことはできないが、以下のように書くことができる(河瀬, 2011)。なお、n は第三扁平率、e は第一離心率、a は長半径(赤道半径)、b は短半径(極半径)である。

$$\varphi \approx \theta + A_2 \sin 2\theta + A_4 \sin 4\theta + A_6 \sin 6\theta + A_8 \sin 8\theta + A_{10} \sin 10\theta$$

$$\theta = \frac{(1+n)S}{a\left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64}\right)}$$

$$A_2 = \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \frac{269}{512}n^5$$

$$A_4 = \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4$$

$$A_6 = \frac{151}{96}n^3 + \frac{417}{128}n^5$$

$$A_8 = \frac{1097}{512}n^4$$

$$A_{10} = \frac{8011}{2560}n^5$$

$$n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{a - b}{a + b}$$

次に、更成緯度 β の緯線一周の長さを考える。更成緯度 β を用いると緯線一周の長さは

$$\pi a \cos\beta$$

と表され、これは次のように変形できる。

$$\pi a \cos\beta = \pi a \frac{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}{\dfrac{1}{\sin\beta}} = \pi a \frac{\dfrac{1}{\tan\beta}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\beta}}} = \pi a \frac{\dfrac{1}{\tan\beta}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\tan^2\beta}}}$$

ここで更成緯度 β の定義より、

$$\tan\beta = \sqrt{1-e^2}\,\tan\varphi$$

であるから、

$$\pi a \cos\beta = \frac{\pi a \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}\tan\varphi}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\left(\sqrt{1-e^2}\tan\varphi\right)^2}}} = \frac{\pi a}{\sqrt{1+\dfrac{1}{(1-e^2)\tan^2\varphi}} \times \sqrt{1-e^2}\tan\varphi} = \frac{\pi a}{\sqrt{1+(1-e^2)\tan^2\varphi}\,\sqrt{1-e^2}\tan\varphi}$$

参考文献

1. 河瀬和重 (2009): 緯度を与えて赤道からの子午線弧長を求める一般的な計算式. 国土地理院時報, 119, 45-55
2. 河瀬和重 (2011): 赤道からの子午線弧長を任意に与えて該当する緯度を求めるより簡明な計算方法. 国土地理院時報, 121, 101-108.
3. 政春尋志 (2011): 地図投影法 —地理空間情報の技法— 朝倉書店